**ORODJE Gapher**

**Mathematical tool Grapher**

**Aljaž Kosmač**

**aljaz.kosmac@student.fmf.uni-lj.si**

**Povzetek**

Ta prispevek je nastal kot del ocene pri predmetu Računalniška orodja v matematiki. Izbrati smo morali neko računalniško orodje in ga predstaviti na študentski konferenci. Sam sem si izbral program Grapher. Programa ni mogoče prenesti s spleta – je prednaložen na Apple-ovem operacijskem sistemu OS X. Prispevek govori predvsem o uporabi programa za analiziranje funkcij ene spremenljivke. Načeloma vidimo, da omogoča tudi nekaj več od tega, ampak na koncu se bo izkazalo, da smo z uporabo precej omejeni. Program preprosto ni toliko zmogljiv kot npr. GeoGebra. Končna ugotovitev je, da je namen programa razviden že iz imena. To pa je risanje in vizualno urejanje grafov.

**Ključne besede**

Graf, funkcija, matematika, analiza

**Abstract [Arial,12, krepko]**

This article was written as a part of the grade for the subject Computer tools in mathematics. We had to choose a computer tool and present it at the student conference. I chose a program called Grapher. The program can not be downloaded – it is preloaded on Apple's operating system OS X. This article is basicaly about one variable analysis. We see, however, that the program does more than that, but ultimately we'll realize see that possiblites are however quite limited. The program is simply not as powerful as for instance GeoGebra. Final conclusion is that its name already reveals the main purpose of this tool. And this is plotting and visual editing of graphs.

**Key words**

Graph, function, mathematics, analysis

**Uvod**

Glavni namen prispevka je opis in predstavitev nekaj možnosti uporabe programa. Program Grapher je predvsem namenjen risanju in vizualnemu urejanju funkcij. Lahko rešimo tudi kakšno nalogo iz matematične analize. Pri opisu se bom osredotočil na funkcije ene spremenljivke in prikaz vizualnega urejanja slik. Spotoma bom program Grapher primerjal s kakšnim drugim računalniškim orodjem.

**Opis orodja**

Program Grapher je kot rečeno Apple-ov pripomoček za risanje in vizualno urejanje grafov funkcij. Omogoča pa tudi reševanje nekaterih osnovnih problemov iz matematične analize. Programa Grapher ni mogoče prenesti s spleta. Edini možen način pridobitve je nakup Apple-ovega računalnika. Program ima svoje prednosti in slabosti.

Prednosti:

* Preprost vnos enačb
* Lepa vizualizacija
* Preprosta analiza funkcije
* Možnost izvoza slik v druge formate

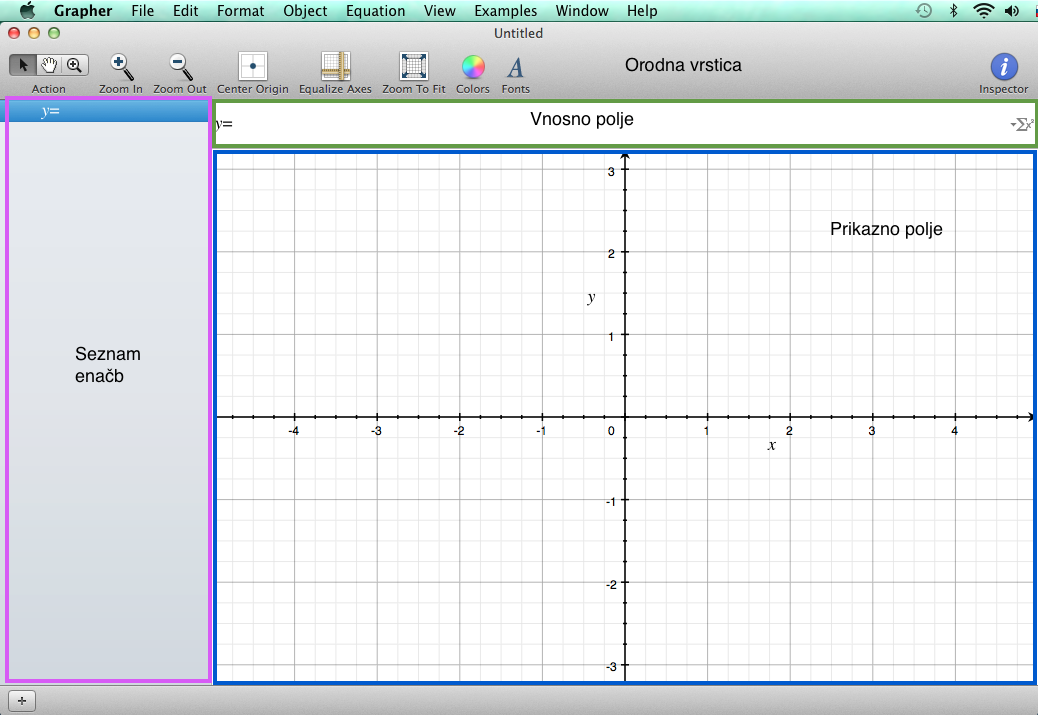
Slabosti:

* Nudi izključno numerične izračune
* Nobene uradne dokumentacije
* Eno stvar lahko vnesemo na več različnih načinov
* Enačbe lahko rešujemo le grafično

**Prvi koraki**

Program Grapher najdemo v mapi z aplikacijami (Applications) v podmapi Utilities. Ko odpremo program, se nam odpre malo okence, kjer izberemo način, kako bomo podali predpis naše funkcije. Na voljo imamo široko paleto možnosti. Izbiramo med 2D in 3D ter seveda med funkcijami ene ali dveh spremenljivk, funkcijami, podanimi s polarnimi koordinatami itd. Izboru primerno se kasneje prilagodi tudi koordinatni sistem. Toda kot že rečeno, se bom v tem povzetku osredotočil le na risanje in analizo grafov funkcije ene spremenljivke. Zato že takoj na začetku izberemo 2D grafe ter nastavitev Default, kar? pomeni kartetični koordinatni sistem z dvema osema x in y.

Zatem se odpre večje okno, kjer naš program lahko dejansko uporabljamo. Zaradi pomanjkanja kakršnekoli resne literature sem imel pri označevanju oz. poimenovanju delov programa dokaj proste roke. Program sem v osnovi razdelil na štiri dele. Na vnosno polje oz. vrstico, kamor vpisujemo naše enačbe funkcij, na prikazno polje, kjer se enačbe izrišejo, na seznam enačb, kjer se nizajo predpisi naših funkcij ter na orodno vrstico, ki je namenjena vizualnemu oblikovanju ter analizi funkcij. Na naslednji sliki je prikaz vseh štirih površin.



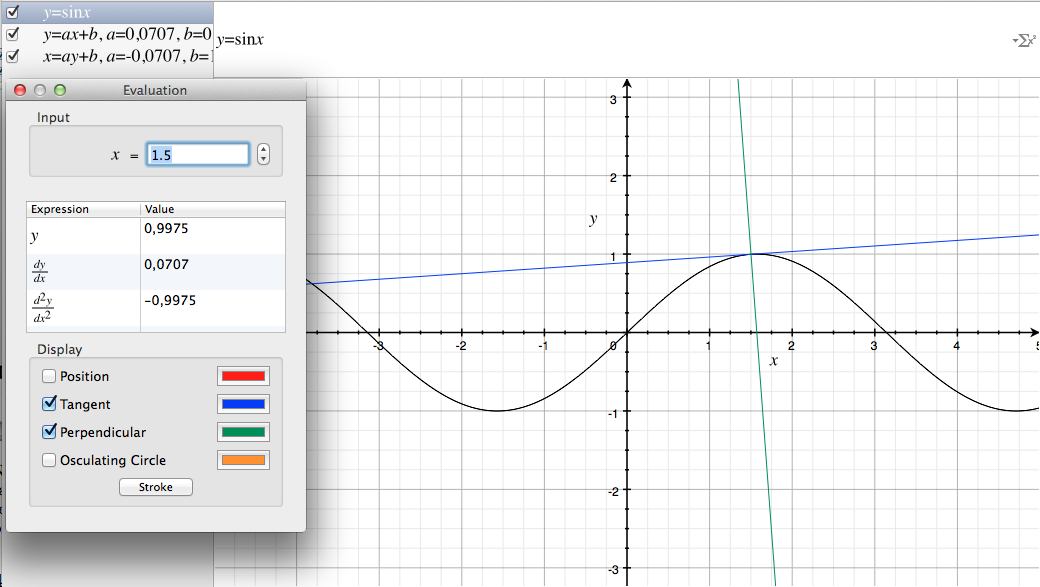
Prikaz razdelitve programa na 4 polja 1

**1.0 Analiza funkcije**

Najprej moramo našo funkcijo narisati na prikazno polje. To pomeni vnos enačbe v vnosnem polju. Ta del je precej enostaven, saj je vnos podoben tistemu v LaTeX-u. Sicer ne zmoremo napisati vsega, kar lahko napišemo v LaTeX-u, ampak Grapher premore kar precejšen del tega. Če pa v pisanju enačb nismo najbolj vešči, lahko naše enačne vedno naklikamo, saj imamo na voljo široko paleto matematičnih simbolov. Omeniti velja, da lahko tudi predpise enačb izvažamo v več formatih. Kot npr. čisto TeX kodo (ker je vnos tu vsaj po moje lažji) ali pa kot sliko s končnico pdf, to enačbo pa lahko potem uporabimo v kakšnem drugem urejevalniku besedila. V našem programu se vse enačbe začnejo s predpisom y=… Tudi če imamo hkrati več enačb, imajo vse enak začetek. Ko smo enkrat vpisali želeni predpis, pritisnemo tipko enter in graf te funkcije se nam izriše na prikaznem polju.

* 1. **Analiza funkcije v neki točki**

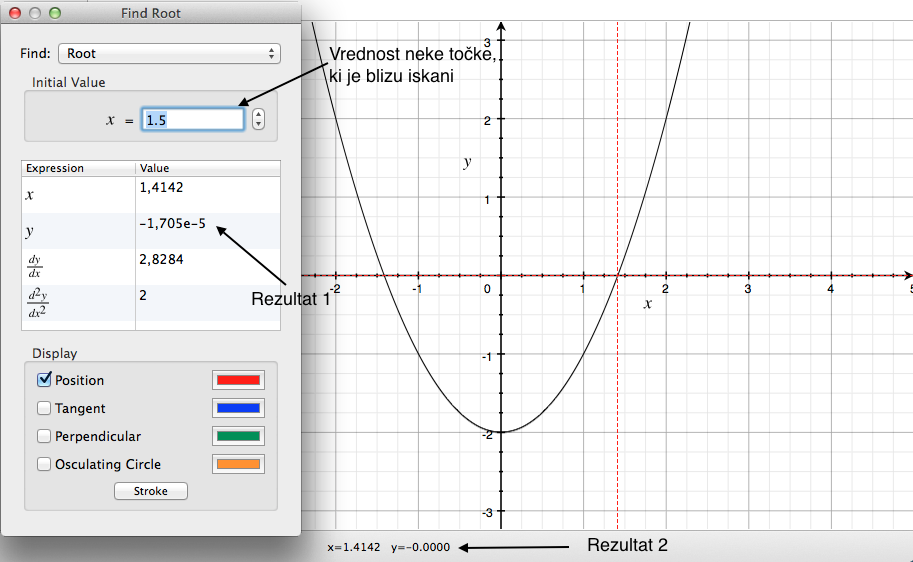
Funkcijo v neki točki analiziramo tako, da v orodni vrstici kliknemo na zavihek equation in nato izberemo evaluation. Odpre se nam malo okence z istim imenom. Nato lahko določimo, v kateri točki želimo analizirati našo funkcijo. Vpišemo koordinato x, nato se v tabeli izpišejo vrednost funkcije v izbrani točki ter vrednosti prvega in drugega odvoda v tej točki. Potem si lahko še ogledamo, kako sta v tej točki videti tangenta in pravokotnica na to funkcijo. Izriše se nam tudi pozicija in pritisnjena krožnica na to točko. To, kar želimo videti, izberemo tako, da želeno stvar odkljukamo v seznamu. S tem še nismo zares dobili enačbe želenih stvari. Če želimo prave enačbe, da lahko z njimi tudi kaj počnemo, moramo še pritisniti na gumb stroke. S tem se nam želene stvari tudi zares izrišejo in enačbe le-teh pojavijo v seznamu enačb na levi strani delovne površine. Naslednja slika prikazuje analizo funkcije sin(x) v točki x=1.5. Nato smo funkciji v tej točki priredili tangento in pravokotnico.



Prikaz analize sinusoide v x=1.5 1

**1.2 Iskanje ničel in lokalnih ekstremov**

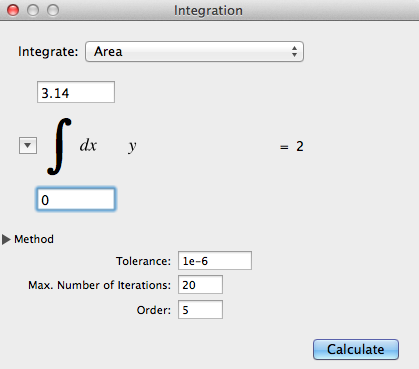
Grapher ima po svoje zelo nenaveden pristop iskanja ničel in lokalnih ekstremov. Lahko bi rekli, da moramo iskati ničle grafično. Zopet v orodni vrstici kliknemo na zavihek equation in zatem izberemo Find Root. Odpre se nam malo okence, podobno tistemu, ki smo ga imeli pri analizi funkcije v neki točki. Toda za razliko najprej na vrhu izberemo, kaj želimo iskati. Izbiramo lahko med ničlami, lokalnimi ekstremi in prevojnimi točkami. Ko izberemo, kar želimo iskati, pogledamo na graf naše funkcije, kje približno (beri v bližini česa znanega) leži naša ničla oz. ekstrem. Zatem ta približek vpišemo v okence x = . Grapher nam sam približa na dejansko ničlo ali ekstrem. Zatem se nam v tabeli zopet izpiše vrednost funkcije v tej točki ter vrednost prvega in drugega odvoda v tej točki. Kot primer imamo na naslednji sliki enačbo . Vemo, da ima enačba dve ničli in . Videli bomo, da, kot sem že omenil, Grapher računa le numerično, zato rezultat v tabeli ni natančno 0, ampak nekaj zelo blizu ničle. Tudi tukaj lahko potem zopet izberemo, da nam Grapher izriše v tej točki tangento, pravokotnico ali pritisnjeno krožnico. To pa je tudi edini način iskanja ničel in s tem reševanja kakršnih koli enačb s programom Grapher. Že tukaj vidimo, da smo s tem programom zelo omejeni, kar se tiče reševanja resnejših matematičnih nalog.



Prikaz iskanja ničel funkcije 1

**1.3 Integriranje**

Program Grapher nam omogoča tudi izračun določenega integrala. Že takoj na začetku velja omeniti, da so tudi ti izračuni zgolj numerični in zaokroženi le na nekaj decimalnih mest. Čeprav se včasih zgodi, da Grapherju podamo kakšen približek, ki ga vzame za točno vrednost (npr., 3,14 včasih postane π). Postopek je sledeč. Zopet kliknemo na zavihek equation, kjer izberemo Integration. Zatem se nam odpre malo oknece, kjer imamo možnost izbire, kaj želimo izračunati. Izbiramo med površino, ki jo funkcija oklepa z x-osjo, volumnom? in prostornino? vrtenine ter dolžin0? krivulje. Nato izberemo meje, v katerih želimo integrirati. Poljubno lahko izbiramo tudi med metodami integracije. Na voljo imamo tri metode, izberemo pa lahko tudi število iteracij ter maksimalno odstopanje. Zatem pritisnemo na gumb calculate in prikaže se nam rezultat. Naslednja slika prikazuje integral funkcije v mejah od 0 do približno π(3.14). Grapher nam rezultat zaokroži na točno vrednost 2.



Integral funkcije sinus 1

**2.0 Vizualno urejanje**

Grapher nam omogoča dobro vizualno urejanje naših izdelkov. Stvar bi lahko bila kasnje primerna za izvoz v kakšnih drugih formatih in objavo v knjigah ali učbenikih, tako v fizični obliki kot na spletu. Grapher nam omogoča urejanje tako koordinatnega sistema (velikost, barva ozadja, …) kot tudi urejanje krivulj (debelina krivulje, barva, označimo lahko nekatere točke). Poleg tega lahko na prikazno polje dodajamo še elemente, s katerimi končnemu uporabniku olajšamo razumevanje. S tem je mišljeno predvsem dodajanje raznih puščic in kvadratkov za besedilo. Prikaz končnih izdelkov bo v zadnjem delu opisa programa, kjer bom tudi prikazal postopek reševanja nalog v tem programu.

**2.1 Definiranje množice točk**

V tem delu se bom osredotočil le na najbolj osnovno delo s točkami in sicer zgolj zaradi potrebe po označevanju zanimivih točk na našem grafu. V resnici lahko s točkami počnemo še precej več. Program Grapher nam omogoča tudi postopek interpolacije in za to potrebujemo nekaj točk. Grapher nam omogoča kar dobro interpoliranje, vendar ga ne bom opisoval, ampak ga bom le navedel na koncu kot zgled uporabe, kjer bomo rešili nalogo iz linearne algebre, kjer iščemo točko, ki se najbolj prilega danim točkam. Množico točk dobimo s klikom na znak + v spodnjem levem kotu. Nato izberemo opcijo *New Point Set*. Namesto vnosnega polja se nam prikažeta dva gumba *Edit points...* ter *Interpolation...* Na prikaznem polju pa se nam izrišejo štiri točke, povezane z lomljeno krivuljo. Množici točk lahko spremenimo ime, tako da dvakrat kliknemo na *Untitled Point Set* v seznamu enačb. Ko imamo označenseznam točk v seznamu enačb, lahko s klikom na gumb *Inspector…?*. Tukaj lahko

spremenimo obliko krivulje, ki povezuje te točke, ter barvo in stil te krivulje.

Lahko določimo tudi, kako naj bodo te točke videti.

**3.0 Zgleda**

V tem delu bom prikazal dva zgleda nalog, ki jih lahko rešimo s programom Grapher. Oba sta sicer precej trivialna. Prva naloga je iz analize in sem si jo izmislil sam, druga pa je iz linearne algebre in je vzeta iz prve domače naloge na programu IŠRM v letu 2013/14. Predvsem pri prvi nalogi bomo videli,, da si moramo pri uporabi Grapherja mnoge stvari sami zapomniti in si jih zapisovati drugam, saj program ne omogoča nikakršne zgodovine ukazov niti jih sam ne shranjuje. Edini način je, da te rezultate sami fizično postavimo na prikazno polje. Poleg tega pa si moramo kakšne stvari še vedno sami izračunati. Kot pri prvi nalogi na primer celotno ploščino, ki jo graf oklepa z abscisno osjo.

**3.1 Analiza polinoma**

Podan je polinom . Določi njegove ničle, ekstreme in določi

ploščino na intervalu med ničlami. Izračunaj tudi enačbo tangente na *p*(*x*) v

točki *x* = −2*.*05.

**Postopek:**

1. V vnosno polje vstavimo predpis našega polinoma.

2. Nato z ukazom *Find root* poiščemo vse ničle našega polinoma.

3. Ustvarimo novo množico točk in v njo dodamo naše ničle.

4. Z ukazom *Find root* poiščemo še vse ekstreme našega polinoma.

5. Tudi za to ustvarimo novo množico točk in vanjo vstavimo lokalne ekstreme

6. Obe množici ustrezno uredimo (pobrišemo krivuljo, ki jih povezuje, olepšamo

z barvami...).

7. Za ploščino odpremo ukaz *Integration...* Prvo nastavitev postavimo na *Area* in določimo meje.

8. S programom izračunamo in .

9. Vzamemo absolutni vrednosti obeh integralov in ju seštejemo.

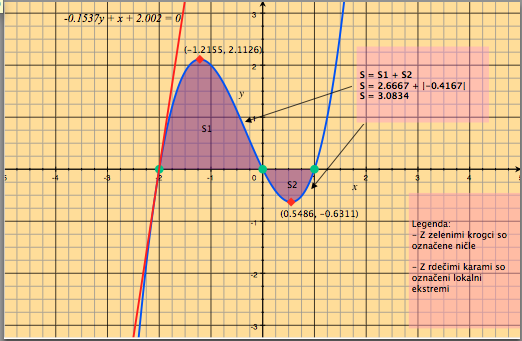
10. Za tangento na dano točko izberemo *Evaluation...* Nato v polje *x* =

vpišemo 2*.*05. Nato le še odkljukamo vse razen tangente in jo s klikom na

gumb *Stroke* tudi zares narišemo.

11. Celotno zadevo po potrebi olepšamo in kakšen rezultat zares s pomočjo

izbire *Object* tudi dodamo na prikazno polje.



Analiza polinoma 1

**3.2 Regresijska premica**

Poišči premico, ki se najbolje prilega točkam *T*1(1*,* 0*.*8)*, T*2(1*.*6*,* 1*.*2)*, T*3(3*.*3*,* 2*.*5)*, T*4(7*,* 4).

**Postopek:**

1. Definiramo novo množico točk in vanjo vstavimo dane točke

2. Kliknemo na gumb *Interpolation...* in pustimo način interpoliranja na ponastavljenemu,

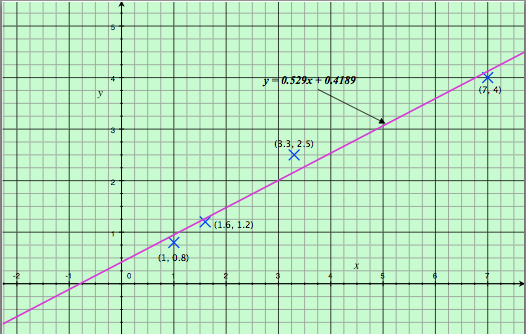
saj bo ta interpoliral z linearno funkcijo, kar je razvidno

iz definicije, ki je prikazana.

3. Kliknemo na gumb *Interpolate* ter nato še na *Stroke* in zares se nam bo

narisala premica, ki se najbolj prilega danim točkam.

4. Po potrebi vse skupaj le še vizualno uredimo in nakažemo, kaj smo naredili.



Regresijska premica 1

**Zaključek**

Na koncu bi le še povzel nekaj misli, ki sem jih ugotovil ob spoznavanju programa Grapher. Vsekakor ima program veliko prednosti, žal pa ima tudi ogromno slabosti. Mislim, da je to predvsem zato, ker je program brezplačno prednaložen na operacijskem sistemu. Še enkrat bi poudaril,, da je program s stališča preproste uporabe (t.j. risanje in urejanje grafov funkcij) zelo uporaben. Zato mislim, da bi bil najbolj uporaben v srednjih in osnovnih šolah, kjer se šele spoznavajo z grafi funkcij in morda krivuljami drugega reda. Menim pa, da program ni najbolj primeren za uporabo na programih visokošolske ali univerzitetne stopnje. Na videz je naš program zelo podoben GeoGebri. Nikakor pa se ne more z njo primerjati po uporabnosti, lahko se pa po preprostosti. Poleg tega je GeoGebra brezplačna in jo lahko namestimo na večini operacijskih sistemov. Dodatno je pri programu Grapher problem v pomanjkanju dokumentacije ali debat na forumih o tem programu. V orodni vrstici sicer obstaja možnost za pomoč (Help), vendar je ta zelo skopa in po mojih izkušnjah večino časa nedelujoča. To lahko vidimo že s klikom na spletno stran <https://support.apple.com/kb/PH6521?locale=en_US> , kjer jasno piše, da Apple te spletne strani več ne posodablja. Tako sem večino lastnosti programa ugotovil sam. Tudi vse slike, ki sem jih objavil v poročilu, so moje ali posnetki zaslona ali pa so izvoženi direktno iz programa Grapher. Menim, da bi podjetje Apple lahko v prihodnosti svoj program izboljšalo, ker je sicer zastavljen zelo preprosto in bi lahko z malo več vgrajenih možnosti in morda kakšno uradno dokumentacijo postal zelo uporabno računalniško orodje za uporabo v matematiki.

**Viri**

1. <http://en.wikipedia.org/wiki/Grapher> (ogled 4. 1. 2015)
2. <https://theputterer.wordpress.com/2011/03/12/mac-os-x-grapher-getting-started/> (ogled 4. 1. 2015)